

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РК
САРАНСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ИМ. АБАЯ КУНАНБАЕВА

ЛЕКЦИОННЫЙ
МАТЕРИАЛ ПО
ПРЕДМЕТУ
«Математика для
ЭКОНОМИСТОВ»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 0518000 «Учет и аудит (по отраслям)»

Часть 2

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Чемезова Анастасия Сергеевна

Раздел 5. Приложение производной

Тема: Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.

Теорема Ролля.

(Ролль (1652-1719)- французский математик)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε , $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равна нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox . Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая $M = m$ и $M \neq m$.

Пусть $M = m$. Тогда функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть $M \neq m$. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка $[a, b]$. Обозначим ε , $a < \varepsilon < b$ точку, в которой $f(\varepsilon) = M$. Так как M - наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $\varepsilon + \Delta x$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0$$

При этом $\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \Delta x > 0 \\ \geq 0, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}.$$

Т.к. $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geq 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \text{ т.е. } f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

- 1) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

- 2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n-1)$ -го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $(n-1)$ -го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

(Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

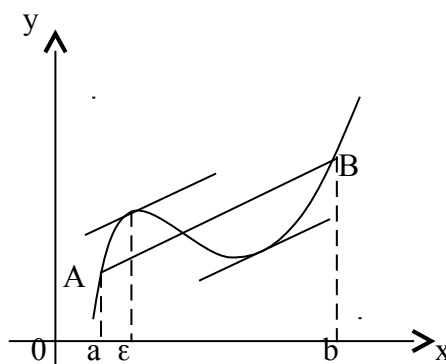
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε

$$a < \varepsilon < b, \text{ такая, что } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon).$$

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{\text{сек AB}}$$

Уравнение секущей АВ можно записать в виде:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$.

Т.к. $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, следовательно

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теорема доказана.

Определение. Выражение $f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется **формулой**

Лагранжа или формулой конечных приращений.

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши.

(Коши (1789-1857)- французский математик)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε .

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функций в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это- очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

которая на интервале $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при $x = a$ и $x = b$ $F(a) = F(b) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $F'(\varepsilon) = 0$. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

А т.к. $g'(\varepsilon) \neq 0$, то $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$

Теорема доказана.

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при $g(x) = x$) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко

используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

Тема: Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty$$

Теорема (правило Лопиталья). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между a и x . Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при $x \rightarrow a$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x , то при $x \rightarrow a$ получим $\varepsilon \rightarrow a$, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема доказана.

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \quad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x\right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталья – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталья может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2;$ $g'(x) = 1 - \cos x;$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталья еще раз.

$f''(x) = e^x - e^{-x};$ $g''(x) = \sin x;$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталья еще раз.

$f'''(x) = e^x + e^{-x};$ $g'''(x) = \cos x;$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$

Неопределенности вида $0^0;$ $1^\infty;$ ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x)\ln f(x)$.

Пример: Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$.

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.

Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталья} \end{array} \right\} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1$$

Следовательно

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x$; $g'(x) = 2e^{2x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$; - получили неопределенность. Применяем правило Лопиталья еще раз.

$$f''(x) = 2; \quad g'(x) = 4e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

дифференциал n- го порядка.

Тема: Применение производной для нахождения промежутков монотонности функции. Экстремум функции.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тогда:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x) > 0$ для любых точек x_1 и x_2 , принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

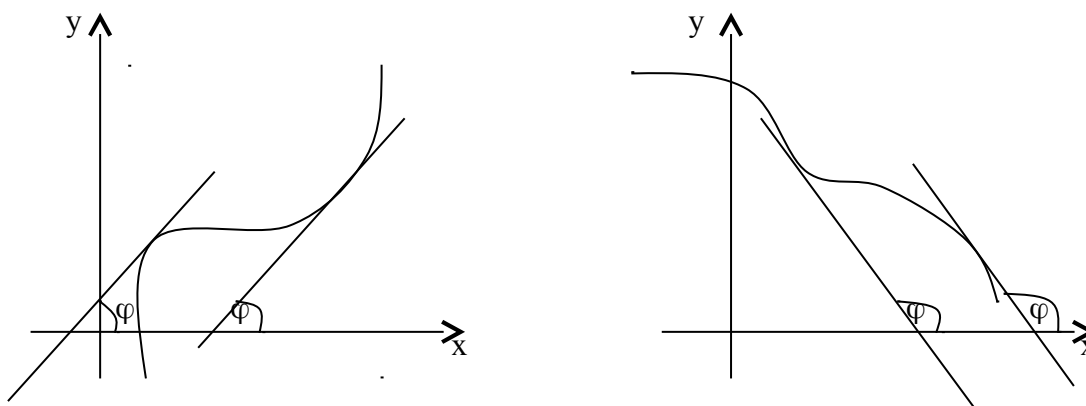
По условию $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) .

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 . Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум. Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при } \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при } \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

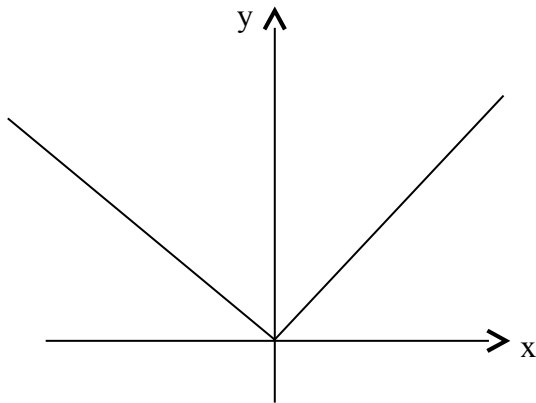
Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

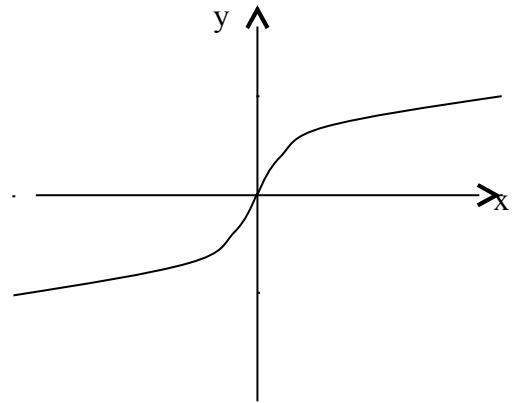
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной.

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , который содержит критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+” - то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\epsilon)(x - x_1)$, где $x < \epsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\epsilon < x_1$; $f'(\epsilon) > 0$; $f'(\epsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\epsilon > x_1$; $f'(\epsilon) < 0$; $f'(\epsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1 , т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.

- 2) Найти значения функции в критических точках.
- 3) Найти значения функции на концах отрезка.
- 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью
производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 .

Теорема. Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$ и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) < 0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1 .

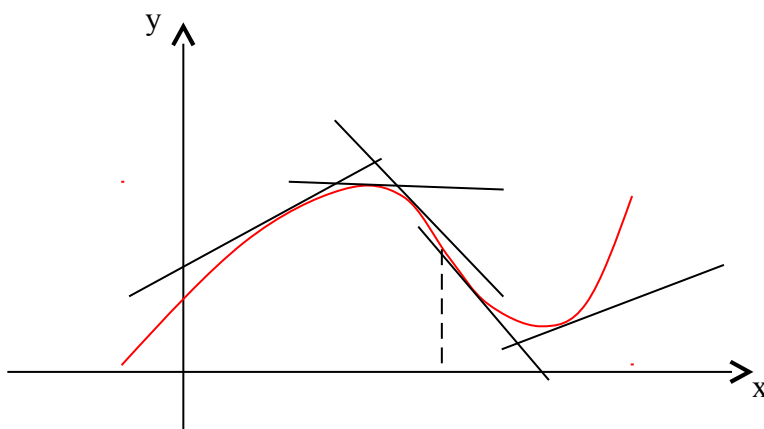
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1 , но $f'(x_1) = 0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Тема: Точки перегиба. Выпуклость и вогнутость функции.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b) , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y = f(x)$;

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b) , то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a, b) .

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.

2) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба.

Теорема доказана.

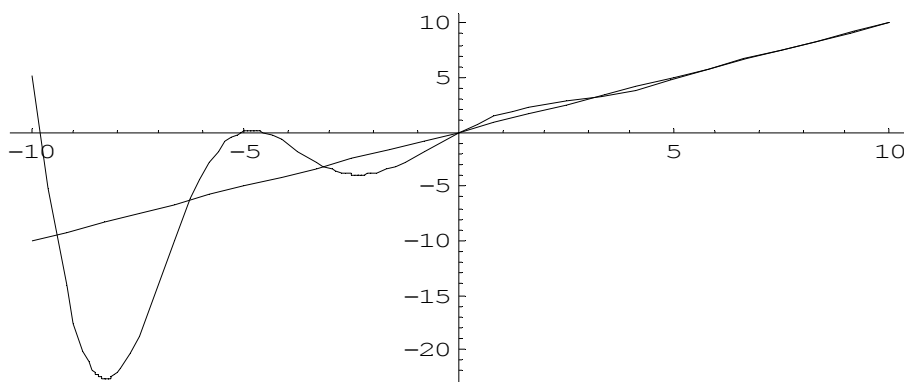
Тема: Асимптоты графика функции.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

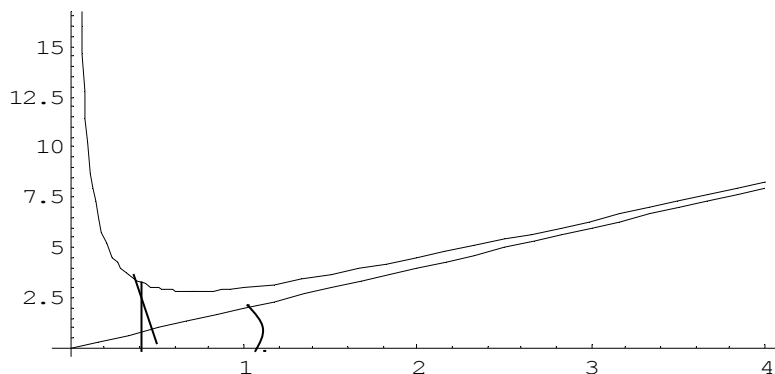
Вертикальные асимптоты.

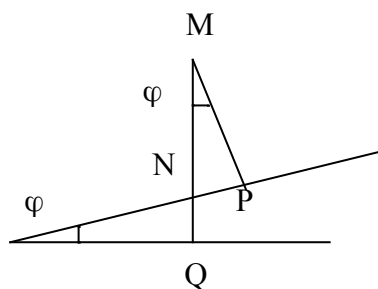
Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \frac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – М, Р – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ох обозначим φ . Перпендикуляр MQ к оси Ох пересекает асимптоту в точке N.

Тогда $MQ = y$ – ордината точки кривой, $NQ = \bar{y}$ – ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \frac{|MP|}{\cos \varphi}$.

Угол φ – постоянный и не равный 90° , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| \cos \varphi = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = |MQ| - |QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Т.к. $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$, т.к. $b = \text{const}$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow 0-0$: $y \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0+0$, следовательно, $x = 0$ -вертикальная асимптота.

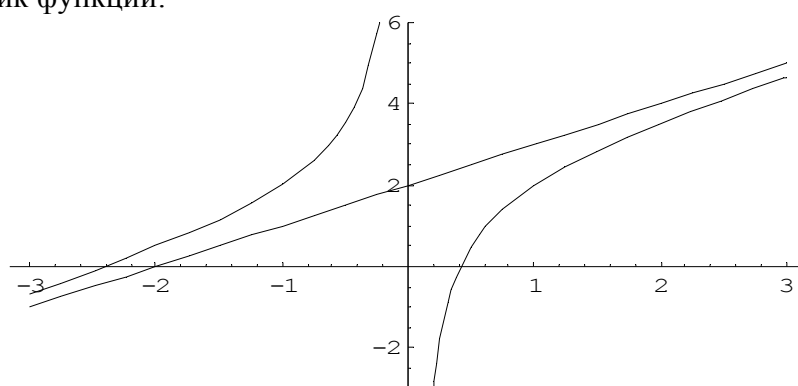
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



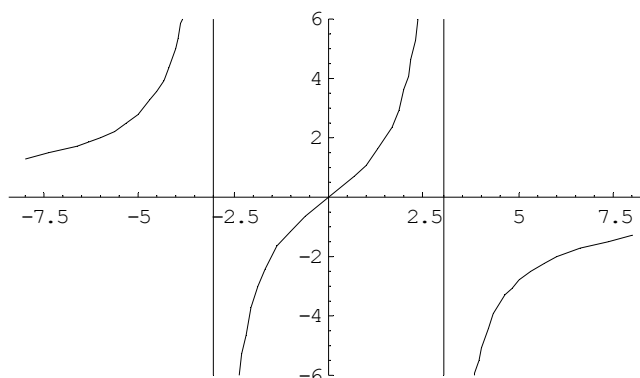
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.



Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

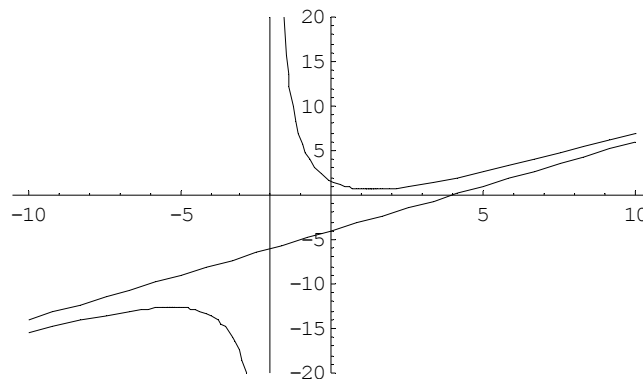
Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой.



Тема: Общая схема исследования функции и построение её графика.

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

- 1) Область существования функции.
Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.
- 2) Точки разрыва. (Если они имеются).
- 3) Интервалы возрастания и убывания.
- 4) Точки максимума и минимума.
- 5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
- 6) Области выпуклости и вогнутости.
- 7) Точки перегиба. (Если они имеются).
- 8) Асимптоты. (Если они имеются).
- 9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
 $-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
 $-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
 $0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
 $1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
 $\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает
 $-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает
 $-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает
 $0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает
 $1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает
 $\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

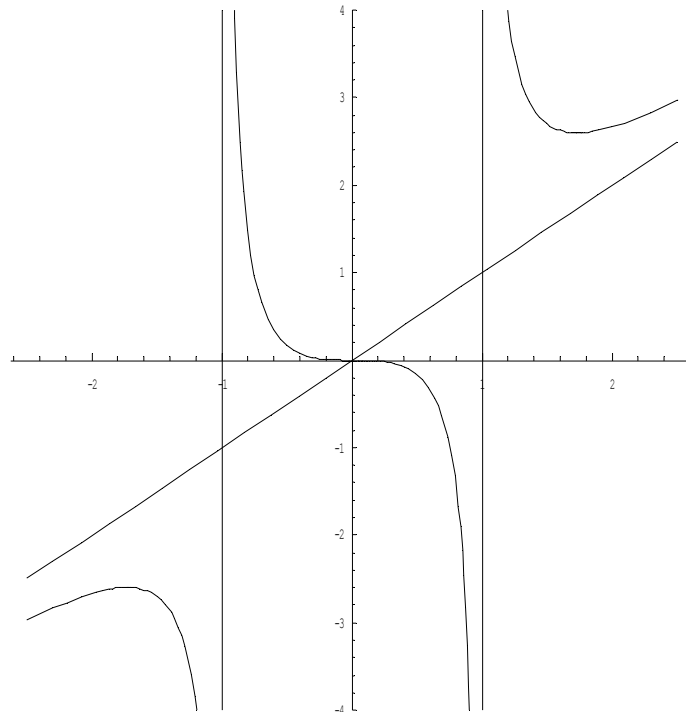
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:



Ниже рассмотрим несколько примеров исследования методами дифференциального исчисления различных типов функций.

Пример: Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции являются все действительные числа $(-\infty; \infty)$.
2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Oy : $x = 0$; $y = 1$;
с осью Ox : $y = 0$; $x = 1$;
4. Точки разрыва и асимптоты: Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: общее уравнение $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 - x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[(\sqrt[3]{1 - x^3})^2 - x \cdot \sqrt[3]{1 - x^3} + x^2 \right]} = 0;$$

Итого: $y = -x$ – наклонная асимптота.

5. Возрастание и убывание функции, точки экстремума.

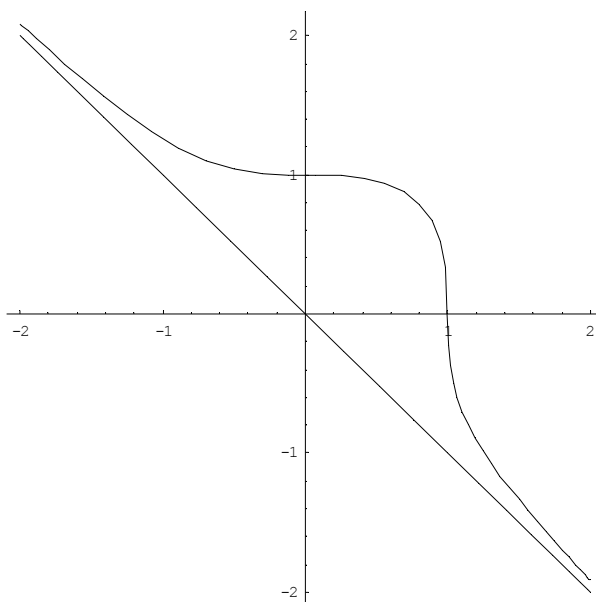
$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{2/3} \cdot (-3x^2)$. Видно, что $y' < 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов. В точке $x = 0$ первая

производная функции равна нулю, однако в этой точке убывание не сменяется на возрастание, следовательно, в точке $x = 0$ функция скорее всего имеет перегиб. Для нахождения точек перегиба, находим вторую производную функции.

$$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}} \quad y'' = 0 \text{ при } x=0 \text{ и } y'' = \infty \text{ при } x=1.$$

Точки $(0,1)$ и $(1,0)$ являются точками перегиба, т.к. $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для любого $h > 0$.

6. Построим график функции.



Пример: Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения x , кроме $x = 0$.
2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Ox : $y = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$
с осью Oy : $x = 0$; y – не существует.
4. Точка $x = 0$ является точкой разрыва $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$, следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота $y = x$.

5. Находим точки экстремума функции.

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = 2, \quad y' = \infty \text{ при } x = 0.$$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функция возрастает,

$y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функция убывает,

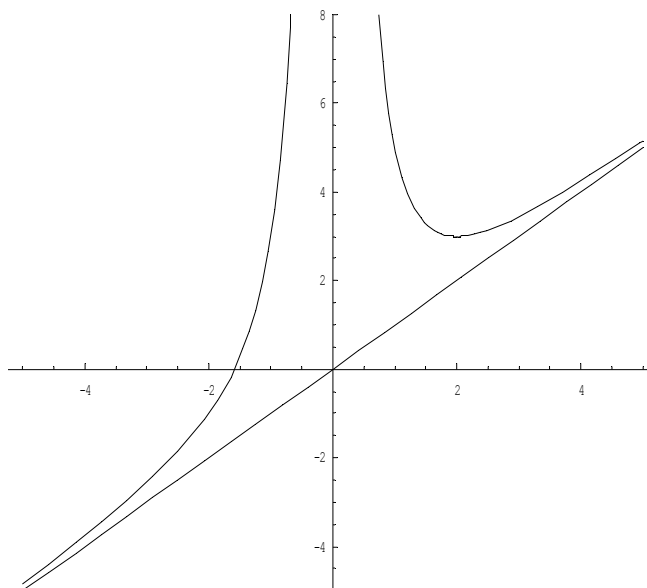
$y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функция возрастает.

Таким образом, точка $(2, 3)$ является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции.



Пример: Исследовать функцию $y = x(x - 1)^3$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции является промежуток $x \in (-\infty, \infty)$.
2. В смысле четности и нечетности функция является функцией общего вида.
3. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy : $x = 0, y = 0$;
с осью Ox : $y = 0, x = 0, x = 1$.

4. Асимптоты кривой.

Вертикальных асимптот нет.

Попробуем найти наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-1)^3}{x} = \infty - \text{наклонных асимптот не существует.}$$

5. Находим точки экстремума.

$$y' = [x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)]' = [x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

Для нахождения критических точек следует решить уравнение $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.

Для этого разложим данный многочлен третьей степени на множители.

Подбором можно определить, что одним из корней этого уравнения является число $x = 1$. Тогда:

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 \quad | \quad x - 1 \\ - \quad 4x^3 - 4x^2 \\ \hline \quad - 5x^2 + 6x \\ - \quad - 5x^2 + 5x \\ \hline \qquad \quad x - 1 \\ - \quad \quad x - 1 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Тогда можно записать $(x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$. Окончательно получаем две критические точки: $x = 1$ и $x = 1/4$.

Примечание. Операции деления многочленов можно было избежать, если при нахождении производной воспользоваться формулой производной произведения:

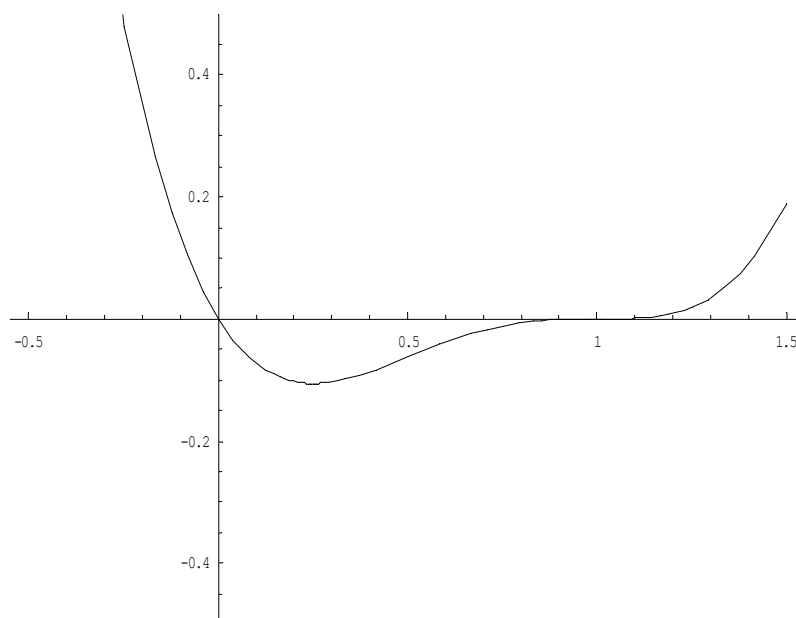
$$y' = [x(x - 1)^3]' = (x - 1)^3 + 3x(x - 1)^2 = (x - 1)^2(x - 1 + 3x) = (x - 1)^2(4x - 1)$$

Найдем вторую производную функции: $12x^2 - 18x + 6$. Приравнивая к нулю, находим: $x = 1$, $x = 1/2$.

Систематизируем полученную информацию в таблице:

	$(-\infty ; 1/4)$	$1/4$	$(1/4 ; 1/2)$	$1/2$	$(1/2 ; 1)$	1	$(1 ; \infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f(x)$	убывает вып.вниз	min	возрастает вып.вниз	пере гиб	возрастает вып.вверх	пере гиб	возрастает вып. вниз

6. Построим график функции.



Тема: Понятие первообразной и неопределённого интеграла. Основные свойства неопределённого интеграла.

Первообразная функция.

Определение: Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$;

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$;
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от x .
6. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$;

Пример: $\int (x^2 - 2 \sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cos x + x + C$;

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Тема: Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомым интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Тема: Интегрирование методом подстановки.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d \int f(x)dx = d \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Тема: Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$
 $= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int \sin x dx] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$
 $= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2[-e^{2x} \cos x - \int \cos x \cdot 2e^{2x} dx] = e^{2x} \sin x +$
 $+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$
$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20} dx = [2x+1 = t; \quad dt = 2dx;] = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2} \sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| +$$

 $+ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \left\{ \sin x = t; \quad dt = \cos x dx \right\} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2 \sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left\{ u = x^2; \quad dv = e^{5x} dx; \right. \\ \left. du = 2x dx; \quad v = \frac{e^{5x}}{5}; \right\} = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx \\ = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right) + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \left\{ dx = d(x+1) \right\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \left\{ x+1 = t \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

Пример

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\{ u = \ln x; \quad dv = \frac{1}{x^3} dx; \right. \\ \left. du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{2x^2}; \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример

$$\int x \ln x dx = \left\{ u = \ln x; \quad dv = x dx; \right. \\ \left. du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Пример

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \left\{ t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x dx = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx; \right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{4} \right) + C.$$

Тема: Интегрирование функций, содержащих квадратный трёхчлен.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax + b}$;

III. $\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$;

II. $\frac{1}{(ax + b)^m}$;

IV. $\frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2, n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

I. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C.$

II. $\int \frac{dx}{(ax + b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax + b)^{m-1}} + C;$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \\ &\cdot \arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \end{aligned}$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx &= \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=6x-5; \quad du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\ &= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C. \end{aligned}$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx &= \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x+3; \quad du=dx; \\ x=u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} - \\ &- 18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx &= \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x-3; \quad du=dx; \\ x=u+3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} + \\ &+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2+6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при $M=0, N=1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n} du = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

$$\text{Обозначим: } \left\{ \begin{array}{l} dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной**. Если применить ее $n-1$ раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2 + s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = (4a)^n \int \frac{Mx + N}{[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2ax + b; \quad du = 2adx; \\ x = \frac{u - b}{2a}; \quad s = 4ac - b^2; \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{M(u - b) + N}{(u^2 + s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2 + s)^n} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2 + s)^n} \right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n , а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\int \frac{3x + 5}{(x^2 - 4x + 7)^2} dx = \int \frac{3x + 5}{((x - 2)^2 + 3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x - 2; \quad du = dx; \\ x = u + 2; \end{array} \right\} = \int \frac{3u + 6 + 5}{(u^2 + 3)^2} du =$$

$$= 3 \int \frac{udu}{(u^2 + 3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2 + 3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = u^2 + 3; \\ dt = 2udu; \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2 + 3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2 + 3} \right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2 + 3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11(x - 2)}{6(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C.$$

Тема: Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$

которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x - b)} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x - b)^\beta} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} +$$

$$+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \dots + \frac{R_1x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{R_2x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x .

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$$

Т.к. $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x - 4)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + (4A + 4B + 8C - 6D)x + (-16A - 8B + 8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 9 \\ -4A - 2B - 6C + D = -30 \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28 \\ -16A - 8B + 8D = -88 \end{cases}$$

Итого:

$$\int \frac{5}{x - 2} dx + \int \frac{3}{x - 4} dx + \int \frac{x + 2}{x^2 + 4} dx = 5 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{2}{x^2 + 4} dx =$$

$$= 5 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \arctg \frac{x}{2} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 \\ \underline{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2} \\ 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 \\ \underline{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} \\ 20x^2 - 25x - 25 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \underline{2x^2 + 3} \end{array} \right.$$

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при $x = 3$ знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r} -3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \underline{3x^3 - 9x^2} \\ -5x^2 - 17x \\ \underline{5x^2 - 15x} \\ -2x + 6 \\ \underline{-2x + 6} \\ 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x - 3 \\ \underline{3x^2 + 5x - 2} \end{array} \right.$$

Таким образом $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x - 3)(x + 2)(3x - 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{3x - 1}$$

$$A(x + 2)(3x - 1) + B(x - 3)(3x - 1) + C(x - 3)(x + 2) = 4x^2 - 5x - 5$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x . Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае $-3, -2, 1/3$. Получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 1/3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1} \\ \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1} \\ \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1} \end{array} \right.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \int \frac{dx}{x + 2} + 2 \int \frac{dx}{x - 3} + 5 \int \frac{dx}{3x - 1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \ln|x + 2| + 2 \ln|x - 3| + \frac{5}{3} \ln|3x - 1| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+2} dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E = \\ = (D+A)x^4 + (3D+E)x^3 + (A+B+2D+3E+4A)x^2 + (3B+C+6D+2E)x + (2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ A+B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 2A+3C+6E+4A=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ 3(3-A)+E=0 \\ A+B+2(3-A)+3E+4A=14 \\ 3B+C+6(3-A)+2E=7 \\ 2A+3C+6E+4A=15 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3 \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2} dx = 3 \int \frac{dx}{x+3} + 2 \int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3 \ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} + \\ + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Тема: Интегрирование тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой**.

Пример.

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right]} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если функция R является нечетной относительно $\cos x$.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\sin x) \cos x dx = \int r(t) dt.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3 \int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3} t^3 = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если функция R является нечетной относительно $\sin x$.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\cos x) \sin x dx = -\int r(t) dt$.

Пример.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = - \\ = \int \left[1 + 2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2} \right] dt = \int dt + \\ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5 \ln | \\ = \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln |t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} -$$

*Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$
функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.*

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(t) dt$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 16} dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right\} = \\ = \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C.$$

*Интеграл произведения синусов и косинусов
различных аргументов.*

В зависимости от типа произведения применяются одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] \\ \int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right] \\ \int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

Пример.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x [\cos 7x \cos 4x] dx = \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 3x dx = \\ = \frac{1}{4} \int \sin 21x dx - \frac{1}{4} \int \sin x dx + \frac{1}{4} \int \sin 13x dx + \frac{1}{4} \int \sin 7x dx = -\frac{1}{84} \cos 21x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{52} \cos 13x - \\ - \frac{1}{28} \cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg 2x + C$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \\ &+ \frac{1}{8} \left[\int dx + \int \cos 4x dx \right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C. \end{aligned}$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx; \\ x = e^u; \quad dx = e^u du; \end{array} \right\} = \int e^u \cos u du = \left\{ \begin{array}{l} p = \cos u; \quad dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; \quad q = e^u; \end{array} \right\} = e^u \cos u + \\ + \int e^u \sin u du &= \left\{ \begin{array}{l} p = \sin u; \quad dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; \quad q = e^u; \end{array} \right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du; \end{aligned}$$

$$\text{Итого} \quad \int e^u \cos u du = e^u (\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$$

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2} (\cos u + \sin u) + C$$

$$\int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C;$$

Тема: Интегрирование иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ где n - натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализуется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \quad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n} \right)' dt;$$

$$\text{Тогда} \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right) \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t) dt.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4(\sqrt[4]{1-2x})^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$
$$= -2 \int \left(t + \frac{t}{t-1} \right) dt = -2 \int t dt - 2 \int \frac{t}{t-1} dt = -t^2 - 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = -t^2 - 2t - 2 \ln|t-1| + C =$$
$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2 \ln|\sqrt[4]{1-2x} - 1| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx = \left\{ \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \right. \\ \left. dx = 12t^{11} dt; \right\} = \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11} dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt =$$
$$= 12 \left(\int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt + \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \right) = 12 \left(\int \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt + \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \right) = 12 \int t dt - 12 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} + 12 \int dt -$$
$$- 12 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6 \ln(t^2 + 1) - 12 \operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) -$$
$$- 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x-1} + C.$$

Тема: Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Определение: Биноминальным дифференциалом называется выражение

$$x^m(a + bx^n)^p dx$$

где m , n , и p – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биномиального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализуется с помощью подстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ – общий знаменатель m и n .

2) Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то интеграл рационализуется подстановкой $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s – знаменатель числа p .

3) Если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то используется подстановка $t = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p .

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

На рассмотрении этих интегралов остановимся более подробно.

$$\text{Интегралы вида } \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

- 1) $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du;$
- 2) $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du;$
- 3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du;$

1 способ. Тригонометрическая подстановка.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du$ подстановкой $u = m \sin t$ или $u = m \cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t; \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du$ подстановкой $u = mtgt$ или $u = mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = atgt; dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}; \end{array} \right\} = \int \frac{a \cos t dt}{\cos^2 t a^4 t g^4 t a} = \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4 \sin^4 t} = \frac{1}{a^4} \int \frac{(1 - \sin^2 t) d \sin t}{\sin^4 t} = \\ &= -\frac{1}{3a^4 \sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C = \left\{ \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right\} = -\frac{(a^2 + x^2)^{3/2}}{3a^4 x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^4 x} + C. \end{aligned}$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2 - 4)^{5/2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{\cos t}; dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{x^2 - 4} = 2tgt; \end{array} \right\} = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 t g^5 t} = \frac{1}{32} \int ctg^4 t dt = \\ &= \frac{1}{32} \int ctg^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{32} \int ctg^2 t d(ctgt) - \frac{1}{32} \int ctg^2 t dt = -\frac{1}{96} ctg^3 t - \frac{1}{32} \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = \\ &= -\frac{1}{96} ctg^3 t + \frac{1}{32} ctgt + \frac{t}{32} + C = \left\{ ctgt = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} \right\} = -\frac{1}{12(x^2 - 4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} + \\ &+ \frac{1}{32} \arccos \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

2 способ. Подстановки Эйлера. (1707-1783)

1) Если $a > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ рационализуется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.

- 2) Если $a < 0$ и $c > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.
- 3) Если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подинтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I. \int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \quad II. \int P(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx; \quad III. \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

где $P(x)$ – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

в этом выражении $Q(x)$ – некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, а λ – некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена $Q(x)$, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , определяют λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена $P(x)$ больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример.

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x - 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$(2Ax + B)(x^2 - 2x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x - 1) + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$2Ax^3 - 4Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 2Bx + 5B + Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$3Ax^3 - (5A - 2B)x^2 + (10A - 3B + C)x + 5B - C + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3A = 3 \\ 5A - 2B = -7 \\ 10A - 3B + C = 0 \\ 5B - C + \lambda = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 6 \\ C = -10 \\ \lambda = 7 \end{array} \right.$$

$$\text{Итого } \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 4}} =$$

$$=(x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + C.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3} dx &= \int \frac{(4x^2 - 6x)(x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2 + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}} \\ \frac{4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x}{\sqrt{x^2 + 3}} &= (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{x^2 + 3} + \frac{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 3}} \\ 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x &= (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2 + 3) + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda \\ 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x &= 3Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 9Ax^2 + 6Bx + 3C + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda \\ 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x &= 4Ax^4 + 3Bx^3 + (2C + 9A)x^2 + (6B + D)x + 3C + \lambda \\ A = 1; \quad B = -2; \quad C = 3/2; \quad D = -6; \quad \lambda = -9/2; \end{aligned}$$

$$\int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3} dx = \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - 6 \right) \sqrt{x^2 + 3} - \frac{9}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| + C.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{v}; \\ dx = -\frac{dv}{v^2} \end{array} \right\} = - \int \frac{v^3 dv}{v^2 \sqrt{\frac{1}{v^2} - 1}} = - \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1 - v^2}} = (Av + B)\sqrt{1 - v^2} + \lambda \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &- \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}} = A\sqrt{1 - v^2} - \frac{(Av + B)v}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &- v^2 = A - Av^2 - Av^2 - Bv + \lambda \\ &- v^2 = -2Av^2 - Bv + A + \lambda \\ A = 1/2; \quad B = 0; \quad \lambda = -1/2; \end{aligned}$$

$$- \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{v\sqrt{1 - v^2}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin v = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} - \arcsin \frac{1}{x} \right) + C$$

Второй способ решения того же самого примера.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\cos t}; \quad dx = \frac{tgt}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{x^2 - 1} = tgt; \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t} \cdot tgt} dt = \int \frac{\sin t \cos^4 t}{\cos^2 t \sin t} dt = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t = \left\{ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\arccos \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

С учетом того, что функции \arcsin и \arccos связаны соотношением $\arcsin \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования C – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример.

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ dx = \cos t dt; \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через
элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$, где $P(x)$ -многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими**.

Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим**.

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим**.

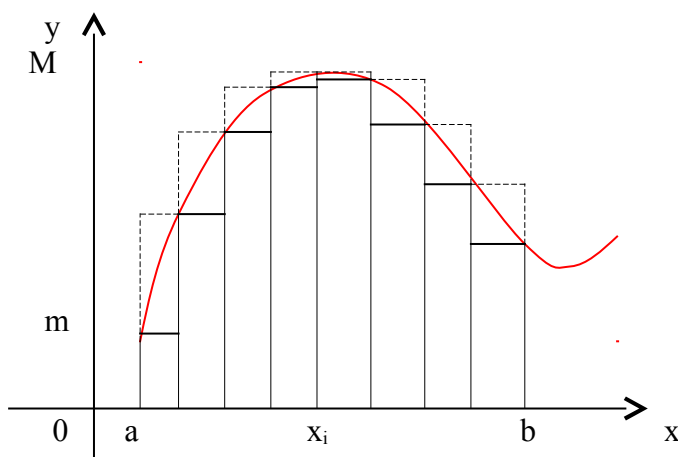
Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
- 2) $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм
- 4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму
- 5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус
- 6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус

Раздел 7. Определенный интеграл.

Тема: Определённый интеграл и его геометрический смысл. Основные свойства определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$
Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \dots [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n.$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма \underline{S} называется **нижней интегральной суммой**, а сумма \overline{S} – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ϵ .

$$x_0 < \epsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \epsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \epsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\epsilon_1) \Delta x_1 + f(\epsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\epsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\epsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

Следовательно,
$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = S$.

Определение: Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение:
$$\int_a^b f(x) dx.$$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции $f(x)$ существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

Также верны утверждения:
$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

- 1) $\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$
- 2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$
- 3) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 4) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$

- 5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Тема: Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x) dx$ нижний предел $a = \text{const}$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ – первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C , то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x , т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x , получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы

интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Тема: Теорема о среднем и ее геометрический смысл.

Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ϵ такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\epsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке все значения от m до M . Другими словами, существует такое число $\epsilon \in [a, b]$, что если

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$ и $\mu = f(\varepsilon)$, а $a \leq \varepsilon \leq b$, тогда $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Обобщенная теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε , такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon) \int_a^b \varphi(x)dx$$

Тема: Приближенные методы интегрирования.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках x_0, x_1, \dots, x_m , то в качестве функции “близкой” к $f(x)$ можно взять многочлен $P(x)$ степени не выше m , значения которого в выбранных точках равны значениям функции $f(x)$ в этих точках.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_n\Delta x$$

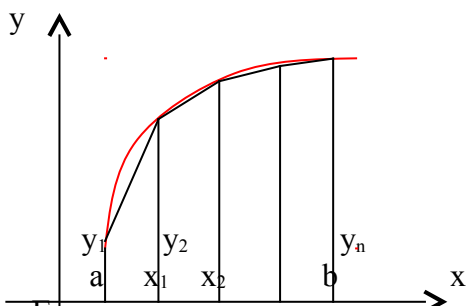
Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \text{ или}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) - \text{любая из этих формул может}$$

применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Формула трапеций.



Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников. Подинтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную.

Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций. Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Площади вписанных трапеций вычисляются по формулам:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x; \quad \dots, \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x$$

После приведения подобных слагаемых получаем **формулу трапеций**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

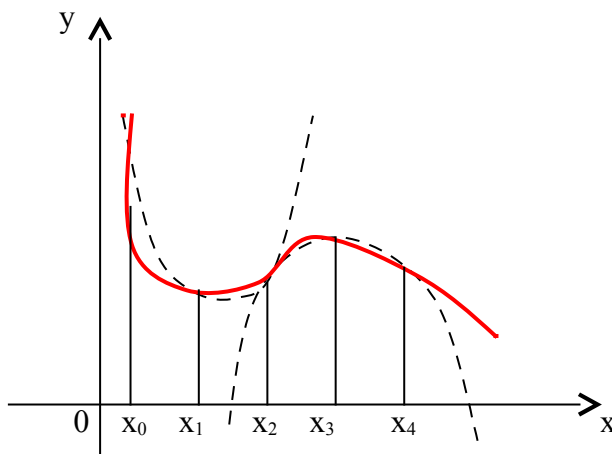
Формула парабол

(формула Симпсона или квадратурная формула).

(Томас Симпсон (1710-1761)- английский математик)

Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на четное число отрезков $(2m)$. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Oy и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[A \frac{x^3}{3} + B \frac{x^2}{2} + Cx \right]_{x_0}^{x_2}$$

Если принять $x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$ (2)

Тогда уравнения значений функции (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

С учетом этого: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Отсюда уравнение (2) примет вид: $S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

Складывая эти выражения, получаем **формулу Симпсона**:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

Пример. Вычислить приближенное значение определенного интеграла

$\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

По формуле Симпсона получим:

$$\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5} [y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) + y(7)]]$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	2.828	3.873	4	4.123	4.899	6.557	8.944	11.874	15.232	18.947	22.978

$$\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5} [2.828 + 22.978 + 2[4 + 4.899 + 8.944 + 15.232] + 4[3.873 + 4.123 + 6.557 + 11.874 + 18.947]] = 91.151$$

Точное значение этого интеграла – 91.173.

Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Для сравнения применим к этой же задаче формулу трапеций.

$$\int_{-2}^8 \sqrt{x^3 + 16} dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) = \frac{8+2}{10} \left(\frac{2.828 + 22.978}{2} + 3.873 + 4 + 4.123 + 4.899 + 6.557 + 8.944 + 11.874 + 15.232 + 18.947 \right) = 91.352$$

Формула трапеций дала менее точный результат по сравнению с формулой Симпсона.

Кроме вышеперечисленных способов, можно вычислить значение определенного интеграла с помощью разложения подинтегральной функции в степенной ряд.

Принцип этого метода состоит в том, чтобы заменить подинтегральную функцию по [формуле Тейлора](#) и почленно проинтегрировать полученную сумму.

Пример. С точностью до 0,001 вычислить интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

Т.к. интегрирование производится в окрестности точки $x=0$, то можно воспользоваться для разложения подынтегральной функции [формулой Маклорена](#).

Разложение функции $\cos x$ имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Зная разложение функции $\cos x$ легко найти функцию $1 - \cos x$:

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности. Это – не ошибка, так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подынтегральное выражение.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Теперь представим наш интеграл в виде:

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{0,5} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} dx$$

В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда. (Т.е. интеграл от суммы будет представлен в виде суммы интегралов членов ряда).

Вообще говоря, со строго теоретической точки зрения для применения этой теоремы надо доказать, что ряд сходится и, более того, сходится равномерно на отрезке интегрирования $[0, 0,5]$. Эти вопросы будут подробно рассмотрены позже (См. [Действия со степенными рядами](#).) Отметим лишь, что в нашем случае подобное действие справедливо хотя бы по свойствам определенного интеграла (интеграл от суммы равен сумме интегралов).

Итак:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{0,5} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \int_0^{0,5} x^{2n-2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \Big|_0^{0,5} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 0,5^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)} \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)2^{2n-1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 6!} - \dots = \\ &= 0,25 - 0,00174 + 0,0000086 - \dots \approx 0,248 \end{aligned}$$

Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

Для справки: Точное (вернее – более точное) значение этого интеграла: 0,2482725418...

Тема: Несобственные интегралы.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, \infty)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, b]$.

Определение: Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$.

$$\text{Обозначение: } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Если этот предел **существует и конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл **расходится**.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Пример.

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b - \text{не существует.}$$

Несобственный интеграл расходится.

Пример.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^{-1} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 1 - \text{интеграл сходится}$$

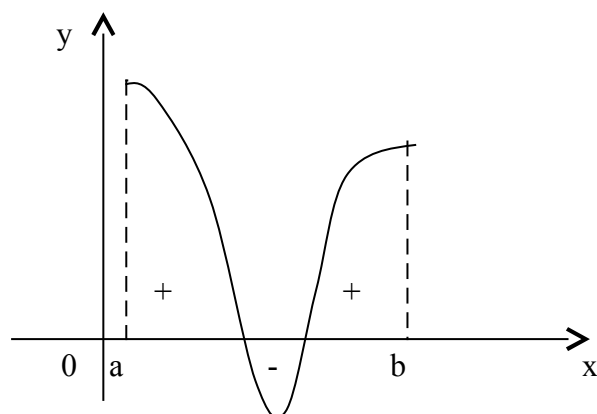
Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ тоже сходится и $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx \geq \int_a^{\infty} f(x) dx$.

Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Тема: Вычисление площади плоских фигур. Длина дуги кривой в прямоугольных координатах

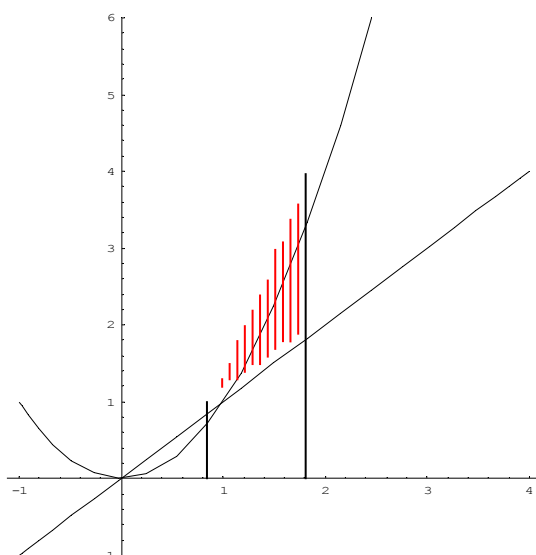


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ox , т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-”, если график расположен выше оси Ox , т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

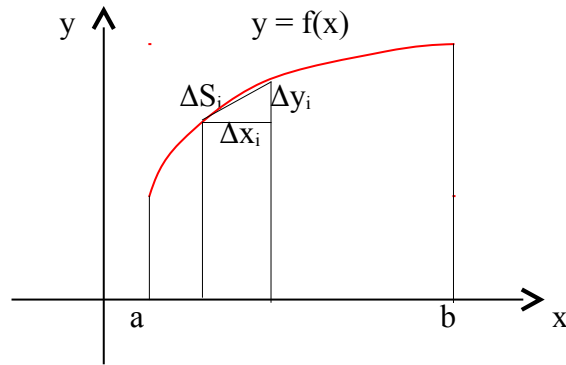
Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (ед}^2\text{)}$$

Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать (см. [Интегрируемая функция.](#)), что

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции (см. [Производная функции, заданной параметрически.](#)), получаем

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Если задана **пространственная кривая**, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y . $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тогда $\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}$

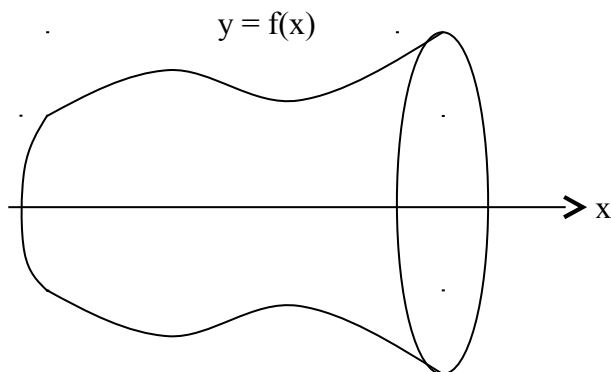
Тогда $S = 2\pi r$. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\rho' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2} d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$

Тема: Вычисление площади и объема тел вращения.

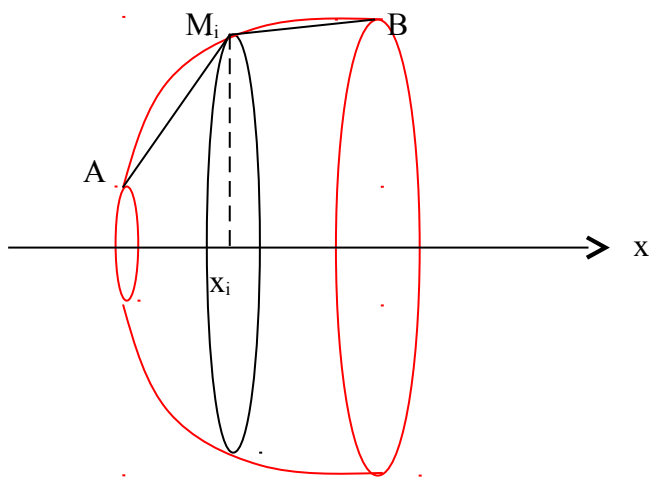
Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox , то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB , при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i . При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i . Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа (см. [Теорема Лагранжа.](#)) к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \quad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n 2f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ - формула вычисления площади поверхности тела вращения.